

§1.5. Nombres complexes.

[DZ, Annexe B]

-29-

On a vu que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.
Maintenant : l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice: Dériver à partir des axiomes de $\mathbb{R}$ [DZ §1.1.3]

(1) Si $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Rightarrow x + (-x) \geq -x \Rightarrow 0 \geq (-x)$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot x = 0 : 0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$

Dém: $0 = 0 \cdot x = (x + (-x)) \cdot x = x \cdot x + (-x) \cdot x = 0 \Rightarrow (-x) \cdot x = x \cdot (-x) = -(x \cdot x)$
 $0 = 0 \cdot (-x) = (x + (-x)) \cdot (-x) = x \cdot (-x) + (-x) \cdot (-x) = 0 \Rightarrow x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = -((-x) \cdot (-x))$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$. Si $x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$.
Si $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow (-x) \cdot (-x) = x \cdot x \geq 0$ } $\Rightarrow x \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(4) $-1 < 0$

Dém: $1 \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0$. Si $-1 > 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$ absurde puisque $-1 > 0$ (voir (1))
 $\xrightarrow{\text{axiome}} \Rightarrow -1 < 0$.

Par (3), $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors (3) et (4) $\Rightarrow x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. ▣

Alors on introduit le symbole „ i ” tel que $i^2 = -1$

On considère les expressions de la forme $\{z = a+ib\} \stackrel{\text{dit}}{=} \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$
avec les opérations suivantes:

-30-

(+) $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$ associative, commutative

$\exists$ élément neutre $(0+i0) \equiv 0$

$\exists$ opposé pour $(a+ib)$: $(-a+i(-b)) + (a+ib) = 0+i0 = 0 \in \mathbb{C}$.

(.) $(a+ib) \cdot (c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$ associative, commutative

$\exists$ élément neutre : $(1+i0) = 1$: $(a+ib)(1+i0) = a+ib$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$

Proposition Soit $z = a+ib \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ ($z \neq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \neq 0$)

Vérification: $(a+ib) \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2 + i(ab-ba)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

$z = a+ib \neq 0 \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$

Exercice: vérifier la distributivité: $z, (z_2+z_3) = z, z_2 + z, z_3 \quad \forall z, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Donc $\mathbb{C}$ est un corps commutatif

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné: $\left. \begin{array}{l} i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0 \\ i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0 \end{array} \right\}$ absurde puisque $-1 < 0$ dans $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. -31-

On a deux racines complexes de l'équation $z^2 = -1$: $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

3 formes des nombres complexes.

Forme cartésienne

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

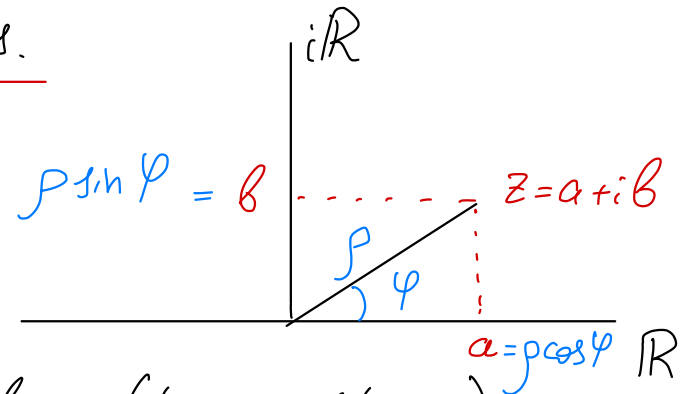
partie réelle $\rightarrow$ partie imaginaire

$$\operatorname{Re} z = a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$$

Le module de z :

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$



Forme polaire (trigonométrique)

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi, \quad \operatorname{Im} z = \rho \sin \varphi$$

$$|z| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho \geq 0$$

le module de $z = \rho$

L'argument de $z \neq 0$ φ est défini à $2\pi k$ près, $k \in \mathbb{Z}$

$$\rho \neq 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{\rho}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{b}{a} \quad \text{si } a = \operatorname{Re} z \neq 0$$

Comment trouver l'argument d'un nombre complexe
On utilise la fonction $\text{Arctg } x$

$$z = a + ib ?$$

-32-

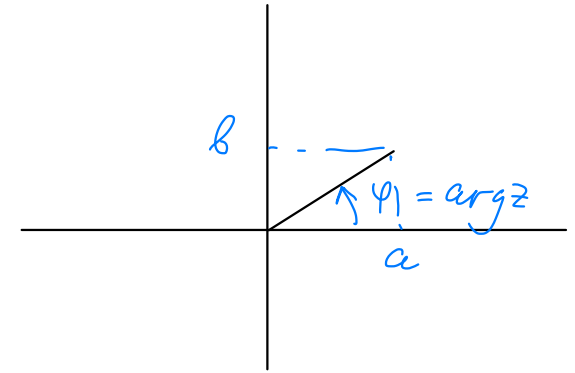
$$\text{Arctg} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Si $z = a + ib$: $a > 0$, alors

$$\varphi = \arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$$

$$\arg z = \text{Arctg} \frac{b}{a} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

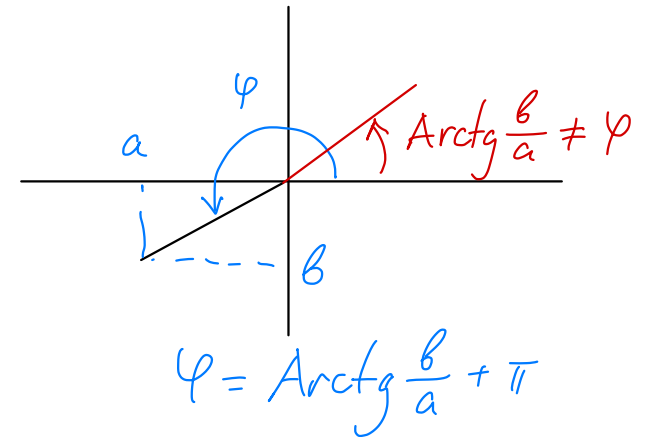


Si $z = a + ib$: $a < 0$, alors

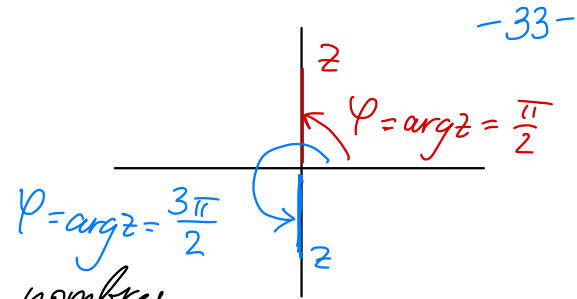
$$\varphi = \arg z \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$$

$$\arg z = \text{Arctg} \frac{b}{a} + \pi$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$



Si $\operatorname{Re} z = a = 0 \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$, si $\operatorname{Im} z = b > 0$
 $\arg z = \frac{3\pi}{2}$, si $\operatorname{Im} z = b < 0$



Remarque L'argument de z est défini seulement pour les nombres complexes non nuls.

Troisième forme de $z \in \mathbb{C}$: la forme polaire exponentielle.

Déf Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors $\underbrace{e^z = \exp(z)}_{\text{exp complexe}} \stackrel{\text{dét}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exp réelle}} (\cos y + i \sin y)$

Si $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x \quad (y = 0)$

Si $z = iy \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = \cos y + i \sin y \quad (x = 0)$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$

Formule d'Euler $y \in \mathbb{R}$

On a: $\underline{e^{i(y_1+y_2)}} = \cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)$
 $\underline{e^{iy_1} \cdot e^{iy_2}} = (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)$

Si $y_1 = y_2 + 2k\pi \Rightarrow \underline{e^{iy_1}} = e^{i(y_2+2k\pi)} = \cos(y_2+2k\pi) + i \sin(y_2+2k\pi) = \cos y_2 + i \sin y_2 = \underline{e^{iy_2}}$

$\Rightarrow e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}$ et $e^{iy_1} = e^{iy_2}$ si $y_1 - y_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$e^{i\pi} = \overset{=-1}{\cos \pi} + i \overset{=0}{\sin \pi} = -1 \Rightarrow$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Formule d'Euler, $\varphi = \pi$

Rappel: forme polaire trig: $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$e^{i\varphi}$ par déf

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

la forme polaire exponentielle

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z| e^{i \arg z}$$

cartesienne

polaire trigonométrique

↔
identique

polaire exponentielle

- les 3 formes d'un nombre complexe.

$$\text{où } |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

le module de z

$$\text{Si } |z| \neq 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right), \text{ si } \operatorname{Re} z > 0$$

$$= \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right) + \pi, \text{ si } \operatorname{Re} z < 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0$$

$$= \frac{3\pi}{2} \text{ si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0$$

defini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque : Forme polaire $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$

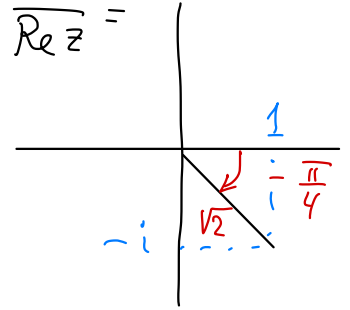
$$|z| = \rho, \varphi = \arg z.$$



Ex 1 $z = 1 - i$ Forme polaire ?

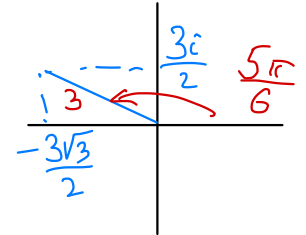
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} ; \arg z = ? \quad \operatorname{Re} z = 1 > 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} =$$

$$= \operatorname{Arctg} \frac{-1}{1} = \operatorname{Arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$



Ex 2 $z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ Forme cartésienne ?

$$z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \underbrace{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{Re} z} + i \underbrace{\frac{3}{2}}_{\operatorname{Im} z}$$



Multiplication en forme polaire.

Proposition Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ deux nombres complexes, $\neq 0$
 Alors $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Dém: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$$= \rho_1 \rho_2 \left((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) \right) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

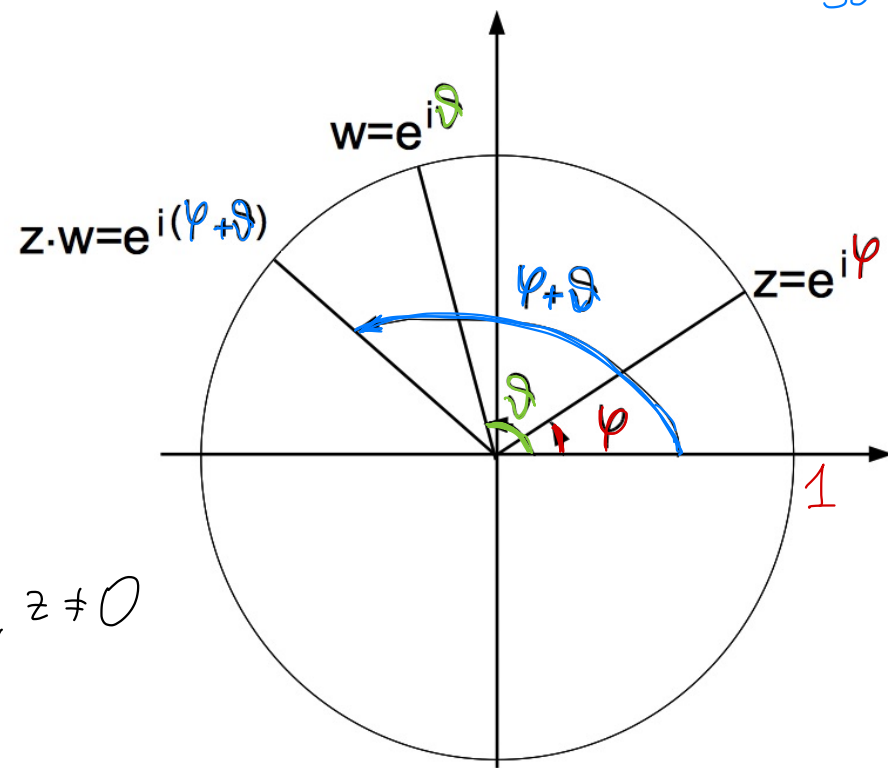


$$\text{Si } z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}, z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2} \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$$

Ex 3. soit $z = e^{i\varphi}$ $|z| = 1$
 $w = e^{i\vartheta}$ $|w| = 1$

Alors $z \cdot w = e^{i(\varphi + \vartheta)}$



Division en forme polaire $z = |z| e^{i \arg z}, z \neq 0$
 $\Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$

Dém : $z \cdot z^{-1} = \rho e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \rho \cdot \frac{1}{\rho} \cdot e^{i(\varphi - \varphi)} = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$ $\square$

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}, z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}, z_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}, |z_2| \neq 0$$

Proposition. (Formule de Moivre)

Pour tout $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

$$\boxed{(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}} \quad \text{Formule de Moivre}$$

Dém: (par récurrence)

(0) Proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq m$ ^{fixé}, $m \in \mathbb{N}$)

Initialisation: (1) Démontrer que Prop est **VRAIE** pour $n=0$ ($n=m$)

Hérédité: (2) Démontrer que si Prop est vraie pour $n=k \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour $n=k+1$

$\Rightarrow$ Alors Prop est vraie pour $n=0 \xrightarrow{(1)} n=1 \xrightarrow{(2)} n=2 \xrightarrow{(2)} n=3 \dots$ tout $n \geq 0$. ($n \geq m$)

Initialisation: $n=1 \Rightarrow (\rho e^{i\varphi})^1 = \rho e^{i1\varphi}$ **VRAI**

Hérédité: Supposons que Prop est vraie pour $n=k \in \mathbb{N}^*$ ($\Leftrightarrow (\rho e^{i\varphi})^k = \rho^k e^{ik\varphi}$).

Démontrons que Prop est vraie pour $n=k+1$.

$$\boxed{(\rho e^{i\varphi})^{k+1} = (\rho e^{i\varphi})^k \cdot (\rho e^{i\varphi}) \xrightarrow{\text{par la supposition}} \rho^k e^{ik\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi} \xrightarrow{\text{produit en forme polaire}} \rho^{k+1} e^{i(k\varphi + \varphi)} = \rho^{k+1} e^{i(k+1)\varphi}} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Par récurrence la Proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

